EXERCICE 1

1)a- $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(\text{Log}x)^n] = +\infty$.

$\cdot \forall x > 0; f'_n(x) = n\frac{1}{x}(\text{Log}x)^{n-1}$.

b- $\forall x > 0; f'_n(x) = n\frac{1}{x}(\text{Log}x)^{n-1} \Rightarrow \forall x > 0; \text{sig}[f'_n(x)] = \text{sig}(\text{Log}x)^{n-1}$

Premier cas : n impair $\Rightarrow$ n – 1 pair

$\Rightarrow \forall x > 0; (\text{Log}x)^{n-1} \geq 0$

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	+	0	+	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

$* \lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [(\text{Log}x)^n] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log}x = -\infty$ et n impair.

Deuxième cas : n pair $\Rightarrow$ n – 1 impair

$\Rightarrow \forall x > 0; \text{sig}[(\text{Log}x)^{n-1}] = \text{sig}[\text{Log}x]$

D'où le tableau de variation de f_n

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	–	0	+	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
			0		

$* \lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} [(\text{Log}x)^n] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log}x = -\infty$ et n pair.

2)a- $\forall x > 0; f_3(x) - f_2(x) = (\text{Log}x)^2[\text{Log}x - 1]$

$\Rightarrow \text{sig}[f_3(x) - f_2(x)] = \text{sig}[\text{Log}x - 1]$

D'où le tableau de position relative de C_3 et C_2.

x	0		1		e		$+\infty$
$\text{sig}[f_3(x)-f_2(x)]$	‖	–	0	–	0	+	
position relative	‖	C_2 est au dessus de C_3			C_2 est au dessous de C_3		

b- Pour la construction de C_2 et C_3.